3e

Arithmétique :

NOMBRES ET CALCULS

Cours

I. Diviseurs et nombres premiers :

A Diviseurs d'un entier: définition

Si la division du nombre entier a par k est un quotient entier et un reste nul, alors on dit que a est divisible par k (ou k est un diviseur de a).

Exemples :

- $26 = 4 \times 6 + 2$ donc 4 n'est pas un diviseur de 26 car le reste de la division de 26 par 4 n'est pas nul.
- $18 = 2 \times 9$ donc 2 est un diviseur de 18. 9 est un autre diviseur de 18.

B Nombres premiers: définition:

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs, 1 et lui-même.

Exemples :

- 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.
- 15 n'est pas un nombre premier car 5 est un diviseur de 15 autre que 1 et 15 lui-même.
- Début de la liste des nombres premiers : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 …

C Critères de divisibilité:

- Un nombre est divisible par 2, s'il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.
- Un nombre est divisible par 5, s'il se termine par 0 ou 5.
- Un nombre est divisible par 10, s'il se termine par 0.
- Un nombre est divisible par 3, si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
- Un nombre est divisible par 9, si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Exemples :

- 356 est divisible par 2 mais n'est pas divisible par 5 ; 10 ; 3 et 9.
- 915 est divisible par 5 et aussi par 3, mais n'est pas divisible par 2 ; 10 et 9.
- 1890 est divisible par 2, par 5, par 10, par 3 et aussi par 9.

D Diviseurs communs à deux entiers: définition:

Si deux entiers naturels a et b sont divisibles par un même entier naturel k, on dit que k et un diviseur commun de a et b

Exemples :

- $36 = 12 \times 3$ *et* $24 = 12 \times 2$ donc 12 est un diviseur commun à 36 et 2
- $24 = 8 \times 3$ et $36 = 8 \times 4{,}5$ donc 8 n'est pas un diviseur commun à 24 et 36.

1 est toujours un diviseur commun à a et b.

Définition : Si deux entiers naturels ont pour seul diviseur commun 1, on dit qu'ils sont premiers entre eux.

Exemples :

- 12 et 7 ont pour seul diviseur commun 1, ils sont premiers entre eux.
- $42 = 7 \times 6$ et $35 = 7 \times 5$ donc 42 et 35 ne sont pas premiers entre eux.

II. Décomposition et fraction irréductible

A propriété:

On peut toujours décomposer un nombre entier non premier en un produit de plusieurs facteurs premiers.

Exemples :

On peut décomposer 588 en produit de facteurs premiers :

- $588 = 2 \times 294$
- $294 = 2 \times 147$
- $147 = 3 \times 49$
- $49 = 7 \times 7$

Ainsi $588 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7^2$

B fraction irréductible: définition:

Soit a et b deux entiers. On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible lorsque a et b sont premiers entre eux.

Exemples :

- $\frac{5}{7}$ est une fraction irréductible car 5 et 7 sont premiers entre eux.
- On veut simplifier la fraction $\frac{120}{84}$ pour cela on peut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers :

  $120 = 2^3 \times 3 \times 5$

  $84 = 2^2 \times 3 \times 7$

  Donc $\frac{120}{84} = \frac{2^3 \times 3 \times 5}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 5}{7} = \frac{10}{7}$

C PGCD PPCM

Définition : *a* et *b* sont deux entiers,

- Parmi les diviseurs communs à a et b, l'un d'eux est plus grand que les autres, on l'appelle Plus Grand Diviseur Commun à a et b. On le note $PGCD(a\,;b)$.
- Parmi les multiples communs à a et b, l'un d'eux est plus petit que les autres, on l'appelle Plus Petit Multiple Commun à a et b. On le note $PPCM(a\,;b)$.

Exemples :

- $PGCD(12;18) = ?$

  $diviseurs\ de\ 12$: 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12

  $diviseurs\ de\ 18$: 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18

  $diviseurs\ communs$ à 12 et 18 : 1 ; 2 ; 3 ; 6

  $PGCD(12\,;18) = 6$
- Les premiers multiples positifs de 12 sont 0 ; 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60 ; 72 ; etc.

  Les premiers multiples positifs de 15 sont 0 ; 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; 75 ; etc.

  12 et 15 ont des multiples positifs communs : 60 ; 120 ; etc.

  Le plus petit est 60. Donc PPCM(12 ; 15) = 60.

PGCD, PPCM et décomposition en produit de facteurs premiers :

- Le PGCD de a et de b est le produit des facteurs premiers communs aux deux décompositions affectés de leur plus petit exposant.
- Le PPCM de a et b est égal au produit de tous les facteurs premiers des deux décompositions affectés de leur plus grand exposant.

Exemples :

- Calcul du PGCD de 1960 et 2016.

  On décompose 1960 et 2016 en facteurs premiers.

  $a = 2^3 \times 5 \times 7^2$ et $b = 2^5 \times 3^2 \times 7$.

  Les facteurs premiers communs sont 2 et 7 donc PGCD(1960 ; 2016) = $2^3 \times 7 = 56$.
- Calcul du PPCM de 135 et 63.

  $135 = 3^3 \times 5$ et $63 = 3^2 \times 7$.

  Les facteurs premiers apparaissant dans les deux décompositions sont 3 ; 5 et 7 donc

  PPCM(135 ; 63) = $3^3 \times 5 \times 7 = 945$.