5e Cours — Divisibilité et Nombres premiers :

NOMBRES ET CALCULS

I. Diviseurs d'un nombre entier :

A Division euclidienne : Définition :

Effectuer la division euclidienne d'un nombre entier a par un nombre entier b $(\neq 0)$, c'est trouver deux entiers q et r tels que :

$$a=b\times q+r$$

a s'appelle le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.

Exemple :

Effectuer la division euclidienne de 387 par 12

$$\begin{array}{r|l} 387 & 12 \\ \cline{2-2} -36 & \\ 27 & 32 \\ -24 & \\ 3 & \end{array}$$

On a donc : $387 = 12 \times 32 + 3$

B Diviseurs d'un entier: définition

Si la division euclidienne du nombre entier a par le nombre entier b est un quotient entier et un reste nul, alors on dit que :

- ➔ a est divisible par b
- ➔ b est un diviseur de a
- ➔ a est un multiple de b

Exemples :

- ➔ $26 = 4 \times 6 + 2$ donc 4 n'est pas un diviseur de 26 car le reste de la division de 26 par 4 n'est pas nul.
- ➔ $18 = 2 \times 9$ donc 2 est un diviseur de 18. 9 est un autre diviseur de 18.

II. Divisibilité et nombres premiers :

A Critères de divisibilité:

- Un nombre est divisible par 2, s'il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.
- Un nombre est divisible par 5, s'il se termine par 0 ou 5.
- Un nombre est divisible par 10, s'il se termine par 0.
- Un nombre est divisible par 3, si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
- Un nombre est divisible par 9, si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Exemples :

- 356 est divisible par 2 mais n'est pas divisible par 5 ; 10 ; 3 et 9.
- 915 est divisible par 5 et aussi par 3, mais n'est pas divisible par 2 ; 10 et 9.
- 1890 est divisible par 2, par 5, par 10, par 3 et aussi par 9.

B Nombre premier : définition :

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs, 1 et lui-même.

Exemples :

- 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.
- 15 n'est pas un nombre premier car 5 est un diviseur de 15 autre que 1 et 15 lui-même.
- Début de la liste des nombres premiers : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 …

III. Décomposition et simplification de fraction :

A propriété:

On peut toujours décomposer un nombre entier non premier en un produit de plusieurs facteurs premiers.

Exemples :

On peut décomposer 588 en produit de facteurs premiers :

- $588 = 2 \times 294$
- $294 = 2 \times 147$
- $147 = 3 \times 49$
- $49 = 7 \times 7$

Ainsi $588 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7^2$

B fraction irréductible:

Exemples :

On veut simplifier la fraction $\frac{120}{84}$ pour cela on peut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers :

$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$

Donc $\frac{120}{84} = \frac{2\times2\times2\times3\times5}{2\times2\times3\times7} = \frac{2\times5}{7} = \frac{10}{7}$