Math93.com

# DNB - Brevet des Collèges 2022 Amérique du Nord

## 1er Juin 2022

## Correction



# CORRECTION de Mathématiques

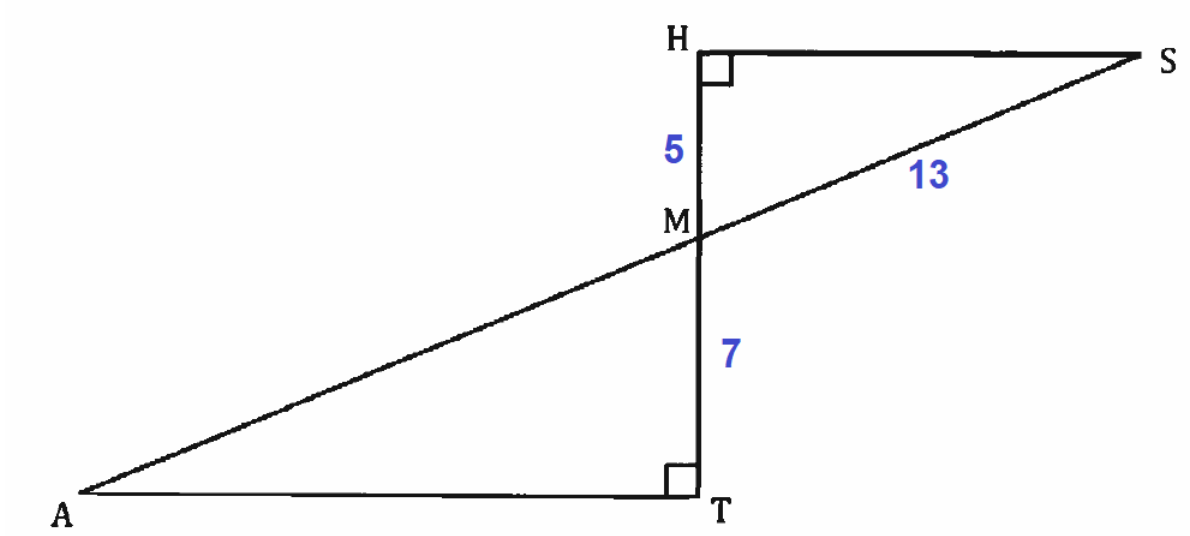
**Durée de l'épreuve : 2 heures**

L'utilisation d'une calculatrice avec mode examen est autorisée (*circulaire n°2015-178 du 1er octobre 2015*)
L'utilisation d'une calculatrice sans mémoire de type collège est autorisé.

Le sujet comporte 11 pages numérotées de 1/11 à 11/11
Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il est complet

| BARÈME (sur 100 points) | | | |
|---|---|---|---|
| Exercice 1 | : | 22 | points |
| Exercice 2 | : | 15 | points |
| Exercice 3 | : | 20 | points |
| Exercice 4 | : | 21 | points |
| Exercice 5 | : | 22 | points |

## Exercice 1. Géométrie — 22 points




La figure ci-dessous n'est pas à l'échelle.

- les points M, A et S sont alignés
- les points M, T et H sont alignés
- $MH = 5$ cm
- $MS = 13$ cm
- $MT = 7$ cm

**1.** Démontrer que la longueur HS est égale à 12 cm.

**Corrigé**

Dans le triangle $HSM$ rectangle en $H$, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned} SM^2 &= HS^2 + HM^2 \\ 13^2 &= HS^2 + 5^2 \\ HS^2 &= 13^2 - 5^2 \\ HS^2 &= 169 - 25 \\ HS^2 &= 144 \end{aligned}$$

Or HS est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$\begin{aligned} HS &= \sqrt{144} \\ HS &= \underline{12 \text{ cm}} \end{aligned}$$

**2.** Calculer la longueur AT.

**Corrigé**

- Données :
  - Les droites (AB) et (DE) sont parallèles
    car toutes deux perpendiculaires à une même troisième droite $(HT)$ ;

 ©ISSN 2272-5318 

– et les points A,C,E et B, C, D sont alignés.

- D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{MH}{MT} = \frac{MS}{MA} = \frac{HS}{AT}$$

soit

$$\frac{5}{7} = \frac{13}{MA} = \frac{12}{AT}$$

D'où

$$\boxed{AT = \frac{7 \times 12}{5} = 16,8 \text{ cm}}$$

**3.** Calculer la mesure de l'angle $\widehat{HMS}$ . On arrondira le résultat au degré près.

**Corrigé**

Le triangle HMS est rectangle en H donc :

$$\cos \widehat{HMS} = \frac{HM}{MS} = \frac{5}{13}$$

Donc

$$\boxed{\widehat{HMS} = \arccos \frac{5}{13} \approx 67°}$$

**4.** Parmi les transformations suivantes quelle est celle qui permet d'obtenir le triangle MAT à partir du triangle MHS ?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Une symétrie centrale | Une symétrie axiale | Une rotation | Une translation | Une homothétie |

*Dans cette question, aucune justification n'est attendue. Recopier la réponse sur la copie .*

**Corrigé**

La transformation qui permet d'obtenir le triangle MAT à partir du triangle MHS est une homothétie de centre M et de rapport $k = -\frac{7}{5}$. *Remarque : le centre et le rapport n'étaient pas demandés.*

**5.** Sachant que la longueur MT est 1,4 fois plus grande que la longueur HM, un élève affirme : « L'aire du triangle MAT est 1,4 fois plus grande que l'aire du triangle MHS. » Cette affirmation est-elle vraie ? On rappelle que la réponse doit être justifiée.

**Corrigé**

Sachant que la longueur MT est 1,4 fois plus grande que la longueur HM, on sait que le rapport de l'homothétie est un rapport d'agrandissement tel que $|k| = 1,4$ (en valeur absolue ou distance à l'origine).

Toutes les dimensions sont donc multipliées par 1,4.

Lorsque les longueurs sont multiplié par un réel positif $|k|$, on sait que les aires le sont par $k^2$ donc l'affirmation est fausse.

L'aire du triangle MAT est $1,4^2 = 1,96$ fois plus grande que l'aire du triangle MHS.

## Exercice 2. QCM — 15 points

Dans cet exercice, aucune justification n'est attendue.
Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses est exacte.
Sur la copie, écrire le numéro de la question et la réponse choisie.

### Question 1

On lance un dé équilibré à 20 faces numérotées de 1 à 20. La probabilité pour que le numéro tiré soit inférieur ou égal à 5 est ...

**a.** $\dfrac{1}{20}$ **b.** $\dfrac{1}{4}$ **c.** $\dfrac{1}{5}$ **d.** $\dfrac{5}{6}$

### Corrigé (Réponse b)

On suppose qu'il y a équiprobabilité des tirages.
Il y a 5 faces sur 20 dont le numéro est inférieur ou égal à 5 donc la probabilité pour que le numéro tiré soit inférieur ou égal à 5 est : $\dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$

### Question 2

Une boisson est composée de sirop et d'eau dans la proportion d'un volume de sirop pour sept volumes d'eau (c'est-à-dire dans le ratio 1 : 7). La quantité d'eau nécessaire pour préparer 560 mL de cette boisson est ...

**a.** 70mL **b.** 80mL **c.** 400mL **d.** 490mL

### Corrigé (Réponse d)

Une boisson est composée de sirop et d'eau dans la proportion d'un volume de sirop pour sept volumes d'eau (c'est-à-dire dans le ratio 1 : 7). On cherche la quantité d'eau nécessaire pour préparer 560 mL de cette boisson

| | | |
|---|---|---|
| Eau | 7 | ? |
| Boisson | 8 | 560 mL |

La quantité d'eau nécessaire pour préparer 560 mL de cette boisson est donc :

$$\boxed{\dfrac{7 \times 560}{8} = 490\text{mL}}$$

### Question 3

La fonction linéaire $f$ telle que $f\left(\dfrac{4}{5}\right) = 1$ est (définie par)

**a.** $f(x) = x + \dfrac{1}{5}$ **b.** $f(x) = \dfrac{4}{5}x$ **c.** $f(x) = \dfrac{5}{4}x$ **d.** $f(x) = x - \dfrac{1}{5}$

### Corrigé (réponse

On a en utilisant la forme c) qui est bien une fonction linéaire car de la forme $x \longmapsto ax$ on a :

$$f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{5}{4} \times \frac{4}{5} = 1$$

### Question 4

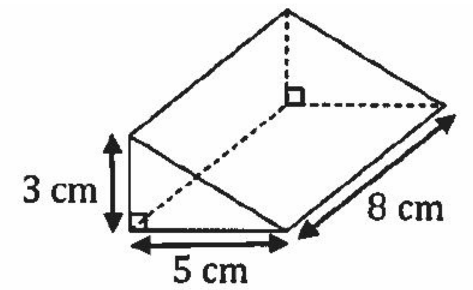
La décomposition en produit de facteurs premiers de 195 est ...

**a.** $5 \times 39$ **b.** $3 \times 5 \times 13$ **c.** $1 \times 100 + 9 \times 10 + 5$ **d.** $3 \times 65$

### Corrigé (réponse b)

$$195 = 5 \times 39$$
$$195 = 5 \times 3 \times 13$$
$$\boxed{195 = 3 \times 5 \times 13}$$

### Question 5




Le volume de ce prisme droit est ...

**a.** $40 \text{ cm}^3$ **b.** $60 \text{ cm}^3$ **c.** $64 \text{ cm}^3$ **d.** $120 \text{ cm}^3$

### Corrigé (réponse b)

Le volume du prisme droit est :

$$V = Aire_{Base} \times Hauteur$$

or ici la base est un triangle rectangle d'aire : $3 \times 5/2 = 7,5 \text{ cm}^2$ et la hauteur $h = 8$ cm donc :

$$\boxed{V = 7,5 \times 8 = 60 \text{ cm}^3}$$

 ©ISSN 2272-5318 

## Exercice 3. 20 points

*Pour être en bonne santé, il est recommandé d'avoir régulièrement une pratique physique. Une recommandation serait de faire au moins une heure de pratique physique par jour en moyenne. Sur 1,6 million d'adolescents de 11 à 17 ans interrogés, 81% d'entre eux ne respectent pas cette recommandation.*
*D'après un communiqué de presse sur la santé.*

**1.** Sur les 1,6 million d'adolescents de 11 à 17 ans interrogés, combien ne respectent pas cette recommandation ?

**Corrigé**
Sur 1,6 million d'adolescents de 11 à 17 ans interrogés, 81% d'entre eux ne respectent pas cette recommandation soit :

$$\boxed{1,6 \times 81/100 = 1,296 \quad \text{soit} \quad 1,296 \text{ millions}}$$

Après la lecture de ce communiqué, un adolescent se donne un objectif. **Objectif : « Faire au moins une heure de pratique physique par jour en moyenne. »** Pendant 14 jours consécutifs, il note dans le calendrier suivant, la durée quotidienne qu ?il consacre à sa pratique physique :

| Jour 1 | Jour 2 | Jour 3 | Jour 4 | Jour 5 | Jour 6 | Jour 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 min | 15 min | 1 h | 1h40min | 30 min | 1h30min | 40 min |
| **Jour 8** | **Jour 9** | **Jour 10** | **Jour 11** | **Jour 12** | **Jour 13** | **Jour 14** |
| 15 min | 1 h | 1h30min | 30 min | 1 h | 1 h | 0 min |

**2.**

**2. a.** Quelle est l'étendue des 14 durées quotidiennes notées dans le calendrier ?

**Corrigé**
L'étendue est la différence entre les valeurs extrêmes soit entre 1h40 (= 100 min) et 0 min :

$$\boxed{e = 100\,\text{min} - 0\,\text{min} = 100\,\text{min}}$$

**2. b.** Donner une médiane de ces 14 durées quotidiennes.

**Corrigé**
On classe les valeurs par ordre croissant, en minutes.

$$\underbrace{\boxed{0; 15; 15; 30; 30; 40; 50}}_{7\ valeurs}; \underbrace{\boxed{60; 60; 60; 60; 90; 90; 100}}_{7\ valeurs}$$

Il y a 14 valeurs donc on prendra par exemple pour médiane la moyenne des 7e et 8e valeurs qui sont respectivement égales à 50 min et 60 min. La médiane est donc

$$\boxed{m_e = 55\,\text{min}}$$

 ©ISSN 2272-5318 

**3.**

**3. a.** Montrer que, sur les 14 premiers jours, cet adolescent n'a pas atteint son objectif.

**Corrigé**

La moyenne sur les 14 premiers jours est de :

$$\boxed{\overline{m} = \frac{0+15+15+30+30+40+50+4\times 60+2\times 90+100}{14} = \frac{700}{14} = 50\,\text{min} < 60\,\text{min}}$$

Or il devait faire au moins 60 min de sport, il n'a pas atteint son objectif.

**3. b.** Pendant les 7 jours suivants, cet adolescent décide alors de consacrer plus de temps au sport pour atteindre son objectif sur l'ensemble des 21 jours. Sur ces 7 derniers jours, quelle est la durée totale de pratique physique qu'il doit au minimum prévoir pour atteindre son objectif ?

**Corrigé**

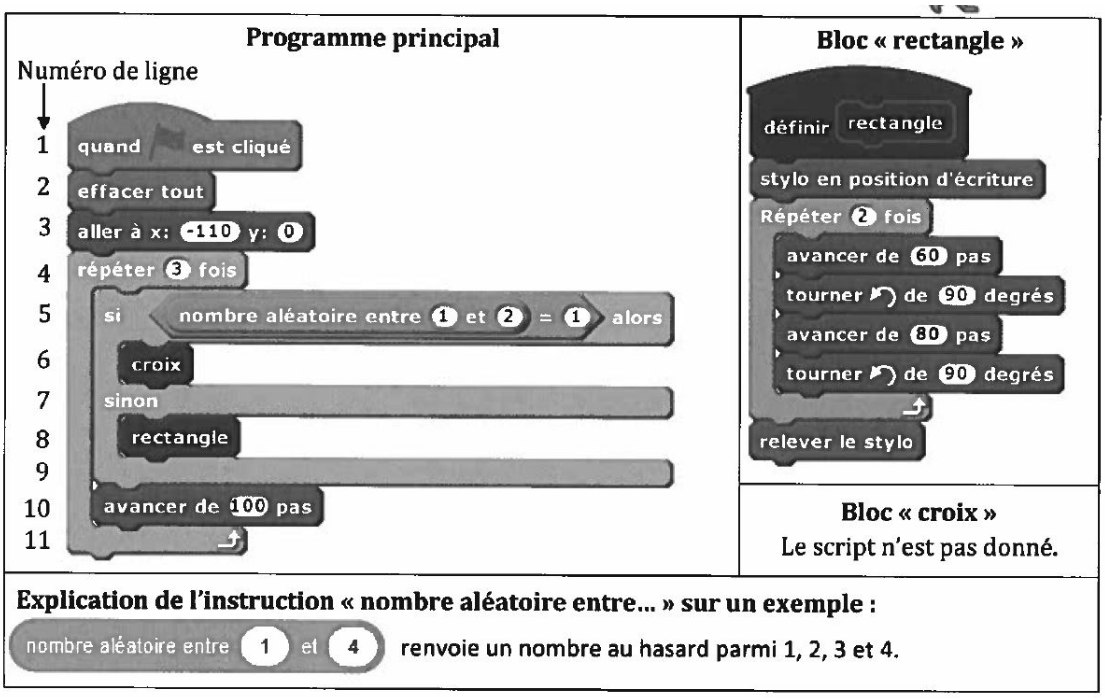
Il lui manque 10 minutes en moyenne sur les 14 premiers jours soit $14 \times 10 = 140$ minutes.

Il doit les compenser lors des 7 jours suivants et devra fournir un total d'heures de sport de :

$$\boxed{140 + 7 \times 60 = 560\,\text{min} \ (\text{ ou } 9\text{ h}20\,\text{min})}$$

## Exercice 4. 21 points

Dans cet exercice, aucune justification n'est attendue. On a créé un jeu de hasard à l'aide d'un logiciel de programmation. Lorsqu'on appuie sur le drapeau, le lutin dessine trois motifs côte à côte. Chaque motif est dessiné aléatoirement : soit c'est une croix, soit c'est un rectangle. Le joueur gagne si l'affichage obtenu comporte trois motifs identiques. Au lancement du programme, le lutin est orienté horizontalement vers la droite :

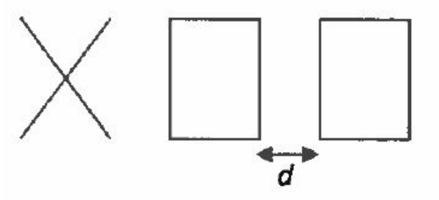



**1.** En prenant pour échelle 1 cm pour 20 pas, représenter le motif obtenu par le bloc « rectangle ».

**Corrigé**

Le rectangle est de dimensions 60 pas sur 80 pas ce qui nous donne avec l'échelle imposée un rectangle de 3 cm sur 4 cm.

**2.** Voici un exemple d'affichage obtenu en exécutant le programme principal :




Quelle est la distance $d$ entre les deux rectangles sur l'affichage, exprimée en pas ?

**Corrigé**

La distance $d$ entre les deux rectangles sur l'affichage, exprimée en pas est :

$$\boxed{d = 100\text{pas} - 60\text{pas} = 40\text{pas}}$$


©ISSN 2272-5318

**3.** Quelle est la probabilité que le premier motif dessiné par le lutin soit une croix ?

**Corrigé**

La probabilité que le premier motif dessiné par le lutin soit une croix est $p_1 = \dfrac{1}{2} = 0,5$.

**4.** Dessiner à main levée les 8 affichages différents que l'on pourrait obtenir avec le programme principal.

**Corrigé**

**4. a.** XXX

**4. b.** XX□

**4. c.** X□X

**4. d.** □XX

**4. e.** X□□

**4. f.** □□X

**4. g.** □X□

**4. h.** □□□

**5.** On admettra que les 8 affichages ont la même probabilité d'apparaître. Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

**Corrigé**

Le joueur gagne si l'affichage obtenu comporte trois motifs identiques donc 3 croix ou trois rectangles.

Sur les 8 affichages possibles, seuls 2 comportent trois motifs identiques et puisque les 8 affichages ont la même probabilité d'apparaître, la probabilité que le joueur gagne est :

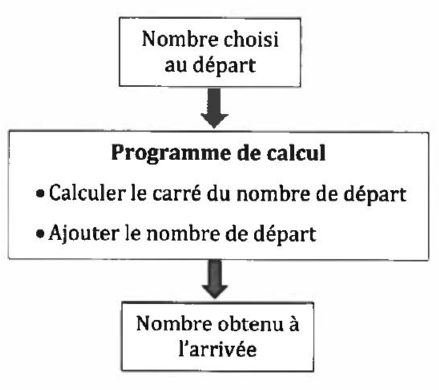
$$\boxed{p_2 = \frac{2}{8} = 0,25}$$

**6.** On souhaite désormais que, pour chaque motif, il y ait deux fois plus de chances d'obtenir un rectangle qu'une croix. Pour cela, il faut modifier l'instruction dans la ligne 5. Sur la copie, recopier l'instruction suivante en complétant les cases :


**Corrigé**

## Exercice 5. 22 points

On considère le programme de calcul suivant, appliqué à des nombres entiers :




### Partie A

**1.** Vérifier que si le nombre de départ est 15, alors le nombre obtenu à l'arrivée est 240.

**Corrigé**

| Choix | 15 |
|---|---|
| Calculer le carré | $15^2 = 225$ |
| Ajouter le nombre de départ | $225 + 15 = 240$ |

**2.** Voici un tableau de valeurs réalisé à l'aide d'un tableur :

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | Nombre choisi au départ | Nombre obtenu à l'arrivée |
| 2 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 2 |
| 4 | 2 | 6 |
| 5 | 3 | 12 |
| 6 | 4 | 20 |
| 7 | 5 | 30 |
| 8 | 6 | 42 |
| 9 | 7 | 56 |
| 10 | 8 | 72 |
| 11 | 9 | 90 |
| 12 | 10 | 110 |

Il donne les résultats obtenus par le programme de calcul en fonction de quelques valeurs du nombre choisi au départ. Quelle formule a pu être saisie dans la cellule B2 avant d'être étirée vers le bas ? Aucune justification n'est attendue.

**Corrigé**

$\boxed{= A2 \wedge 2 + A2}$ ou $\boxed{= A2 * A2 + A2}$

**3.** On note $x$ le nombre de départ. Écrire, en fonction de $x$, une expression du résultat obtenu avec ce programme de calcul.

**Corrigé**

| Choix | $x$ |
|---|---|
| Calculer le carré | $x^2$ |
| Ajouter le nombre de départ | $x^2 + x$ |

## Partie B

On considère l'affirmation suivante : « Pour obtenir le résultat du programme de calcul, il suffit de multiplier le nombre de départ par le nombre entier qui suit. »

**4.** Vérifier que cette affirmation est vraie lorsque le nombre entier choisi au départ est 9.

**Corrigé**

En partant de 9 on obtient avec la formule précédente :

$$9^2 + 9 = 81 + 9 = 90$$

Or si on multiplie le nombre de départ par le nombre entier qui suit on obtient bien le même résultat :

$$9 \times 10 = 90$$

**5.** Démontrer que cette affirmation est vraie quel que soit le nombre entier choisi au départ.

**Corrigé**

On a montré qu'en partant d'un nombre $x$, le résultat obtenu est $x^2 + x$, or en factorisant par $x$ :

$$x^2 + x = x \times (x + 1)$$

Et si l'on suppose que $x$ est un entier, l'affirmation est bien vraie : « Pour obtenir le résultat du programme de calcul, il suffit de multiplier le nombre de départ par le nombre entier qui suit. »

**6.** Démontrer que le nombre obtenu à l'arrivée par le programme de calcul est un nombre pair quel que soit le nombre entier choisi au départ.

**Corrigé**

- Si le nombre de départ $x$ est un entier naturel pair, alors il s'écrit sous la forme $x = 2n$ avec $n$ entier naturel. De ce fait :
$$x(x + 1) = 2n \times (2n + 1) = 2 \times \underbrace{n(2n + 1)}_{entier}$$
Donc $x(x + 1)$ est bien pair car de la forme 2 fois un entier naturel.
- Si $x$ est impair alors nécessairement son successeur $(x + 1)$ est pair et une preuve similaire montre que $x(x + 1)$ est pair.
- Conclusion : le nombre obtenu à l'arrivée par le programme de calcul est un nombre pair quel que soit le nombre entier choisi au départ.

**Fin du devoir**


©ISSN 2272-5318