CORRECTION BREVET MATHS PONDICHERY 2014

Exercice 1

Emma et Arthur ont acheté pour leur mariage 3 003 dragées au chocolat et 3 731 dragées aux amandes.

1°) Arthur propose de répartir ces dragées de façon identique dans 20 corbeilles. Chaque corbeille doit avoir la même composition. Combien lui reste-t-il de dragées non utilisées?

J'effectue les divisions euclidiennes suivantes :

$3003 = 20 \times 150 + 3$ et $3731 = 20 \times 186 + 11$

Dans chaque, il y aura 150 dragées au chocolat et 186 dragées aux amandes.

3+11 = 14

Il restera en tout 14 dragées.

2°) Emma et Arthur changent d'avis et décident de proposer des petits ballotins* dont la composition est identique. Ils souhaitent qu'il ne leur reste pas de dragées.

a) Emma propose d'en faire 90. Ceci convient-il? Justifier.

$3003 = 90 \times 33 + 33$ et $3731 = 90 \times 41 + 41$

3 003 et 3 731 ne sont pas divisibles par 90, il est impossible de faire des ballotins de composition identique sans qu'il ne reste de dragées.

b) Ils se mettent d'accord pour faire un maximum de ballotins.
Combien en feront-ils et quelle sera leur composition?

Afin de constituer un maximum de ballotins et de répartir équitablement tous les dragées au chocolat et aux amandes, je recherche le PGCD de 3 003 et 3 731.

J'utilise pour cela l'algorithme d'Euclide :

$3731 = 3003 \times 1 + 728$

$3003 = 728 \times 4 + 91$

$728 = 91 \times 8 + 0$

Le dernier reste non nu lest 91 donc PGCD(3 731; 3 003) = 91. Emma et Arthur pourront constituer un maximum de 91 ballotins.

3 731 : 91 = 41   et   3 003 : 91 = 33

Chaque ballotin sera constitué de 33 dragées au chocolat et 41 dragées aux amandes.

*Un ballotin est un emballage pour confiseries, une boîte par exemple.

Exercice 2

Question 1

Réponse C : $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

Question 2

Réponse C : Si deux surfaces ont la même aire alors leurs périmètres ne sont pas forcément égaux.

Question 3

Réponse A : Soit f la fonction affine définie par :
$f(x) = 3x - (2x + 7) + (3x + 5) = 3x - 2x - 7 + 3x + 5 = 4x - 2$

Question 4

Réponse C : Hicham a récupéré les résultats d'une enquête sur les numéros qui sont sortis ces dernières années au loto. Il souhaite jouer lors du prochain triage. L'enquête ne peut pas l'aider.

Question 5

Réponse A : Une expression factorisée de

$$(x-1)^2 - 16 = (x-1+4)(x-1-4) = (x+3)(x-5)$$

Exercice 3

"Je prends un nombre entier. Je lui ajoute 3 et je multiplie le résultat par 7. J'ajoute le triple du nombre de départ au résultat et j'enlève 21. J'obtiens toujours un multiple de 10."

Est-ce vrai? Justifier

Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit n le nombre de depart, appliquons-lui le programme :

Je lui ajoute 3	$n+3$
Je multiplie le résultat par 7	$7(n+3)=7n+21$
J'ajoute le triple du nombre de départ au résultat	$7n+21+3n=10n+21$
J'enlève 21	$10n+21-21=10n$

Le nombre de départ est multiplié par 10. On obtient donc toujours un multiple de 10 par ce programme.

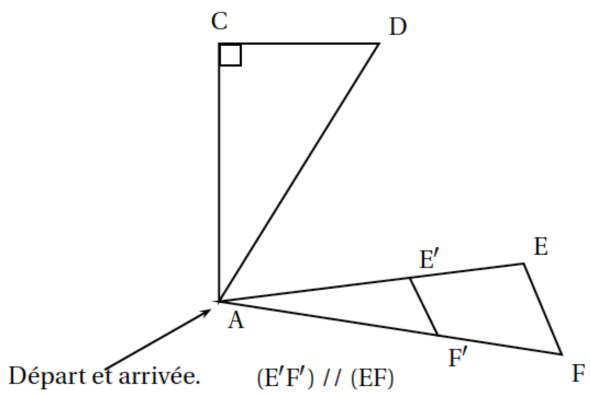
Exercice 4

Une commune souhaite aménager des parcours de santé sur son territoire. On fait deux propositions au conseil municipal, schématisées ci-dessous:

- le parcours ACDA
- le parcours AEFA

Ils souhaitent faire un parcours dont la longueur s'approche le plus possible de 4 km. Peux-tu les aider à choisir le parcours? Justifier.

Attention : La figure proposée au conseil municipal n'est pas à l'échelle, mais les codages et les dimensions données sont correctes.



AC = 1,4 km
CD = 1,05 km
AE' = 0,5 km
AE = 1,3 km
AF = 1,6 km
E'F' = 0,4 km

L'angle $\widehat{A}$ dans le triangle AEF vaut 30°

Etude du parcours ACDA :

Afin de déterminer le périmètre de ACDA, je dois déterminer la longueur [AD].

ACDA est un triangle rectangle, donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AD^2 = CD^2 + CA^2$$
$$AD^2 = 1{,}05^2 + 1{,}4^2$$
$$AD^2 = 1{,}1025 + 1{,}96$$
$$AD^2 = 3{,}0625$$
$$AD = \sqrt{3{,}0625}$$
$$AD = 1{,}75$$

Le segment [AD] a une longueur de 1,75 km.

J'en déduis le périmètre du parcours ACDA : 1,05 + 1,4 + 1,75 = 4,2

Le parcours ACDA mesure 4,2 km.

Etude du parcours AEFA :

Afin de déterminer le périmètre de ACDA, je dois déterminer la longueur [EF].

Les triangles AE'F' et AEF sont tels que :

(EE') et (FF') sont sécantes en A;

(EF) est parallèles à (E'F').

Donc, d'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{AE'}{AE} = \frac{AF'}{AF} = \frac{E'F'}{EF}$

Je remplace les longueurs connues par leur valeurs.

$$\frac{0{,}5}{1{,}3} = \frac{AF'}{1{,}6} = \frac{0{,}4}{EF}$$

J'utilise l'égalité entre le 1er et le 3ème quotient.

$$\frac{0{,}5}{1{,}3} = \frac{0{,}4}{EF}$$

J'effectue les produits en croix.

$$EF = \frac{1{,}3 \times 0{,}4}{0{,}5} = 1{,}04$$

Le segment [EF] a une longueur de 1,04 km.

J'en déduis le périmètre du parcours AEFA : 1,3 + 1,04 + 1,6 = 3,94

Le parcours AEFA mesure 3,94 km.

3,94 est plus proche de 4 que 4,2. Le Conseil Municipal doit choisir le parcours AEFA.

NB. La donnée de l'angle $\hat{A}$ ne servait à rien et était un piège pour ceux qui s'empressent à utiliser la trigonométrie dès qu'il voit un angle. Une condition est obligatoire pour pouvoir utiliser la trigonométrie, le triangle doit être rectangle.

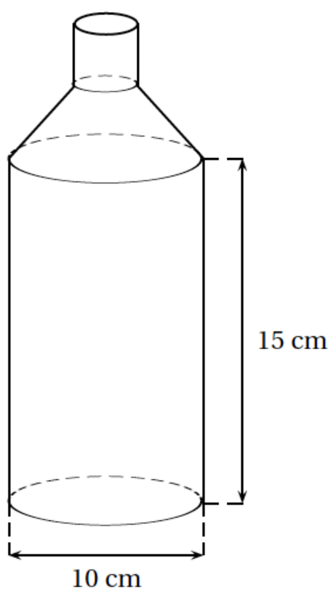
Exercice 5 **(8 points)**

Pense-bête : toutes les formules données ci-dessous correspondent bien à des formules d'aires ou de volumes. On ne sait pas à quoi elles correspondent, mais elles peuvent quand même être utiles pour résoudre l'exercice ci-dessous.

$$\frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \pi r^2 \qquad \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

Voici une bouteille constituée d'un cylindre et d'un tronc surmonté par un goulot cylindrique. La bouteille est pleine lorsqu'elle est remplie jusqu'au goulot.



Les dimensions sont notées sur le schéma.

1°) Calculer le volume exact de la partie cylindrique de la bouteille, puis en donner un arrondi au cm^3.

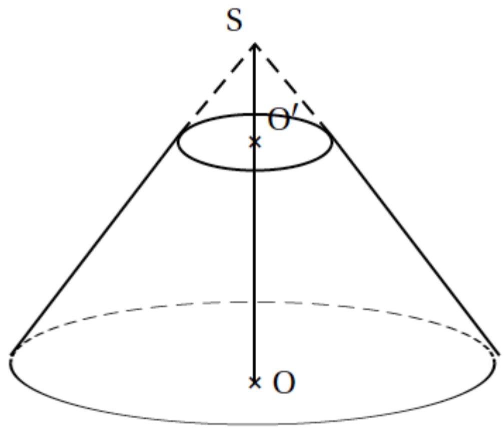
La formule pour calculer l'aire d'un cylindre est :

$$V_{cylindre} = \pi \times r^2 \times h$$

Soit :

$$V_{cylindre} = \pi \times 5^2 \times 15$$
$$V_{cylindre} = 375\pi \text{ cm}^3 \text{ (valeur exacte)}$$
$$V_{cylindre} \approx 1178 \text{ cm}^3 \text{ (valeur arrondie au cm}^3\text{)}$$

2°) Pour obtenir le tronc de cône, on a coupé un cône par un plan parallèle à la base passant par O'. La hauteur SO du grand cône est de 6 cm et la hauteur SO' du petit cône est égale à 2 cm. Le rayon de la base du grand cône est de 5 cm.



a) Calculer le volume V_1 du grand cône de hauteur SO (donner la valeur exacte).

La formule pour calculer l'aire d'un cône est :

$$V_{cône} = \frac{\pi \times r^2 \times SO}{3}$$
$$V_{cône} = \frac{\pi \times 5^2 \times 6}{3} = 50\pi$$

Le volume du grand cône est 50π.

b) Montrer que le volume V_2 du tronc de cône est égal à $\frac{1300}{27}$ cm^3. En donner une valeur arrondie au cm^3.

Le petit cône est une réduction du grand cône de coefficient $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Si les longueurs du petit cône sont $\frac{1}{3}$ fois celles du grand cône, le volume du petit cône est donc $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ fois celui grand cône, c'est-à-dire est 27 fois plus petit que celui du grand cône.

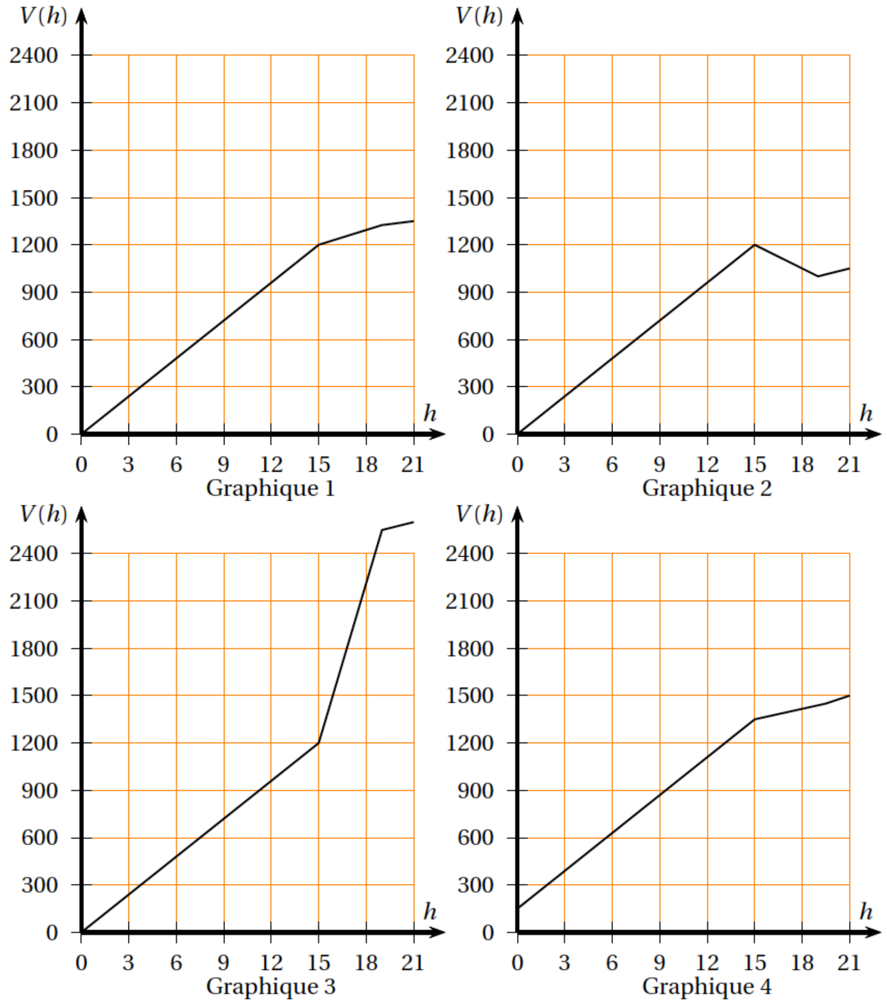
Le volume du grand cône est donc : $\frac{V_1}{27} = \frac{50\pi}{27}$ cm^3.

Ainsi,

$$V_2 = V_1 - \frac{50\pi}{27} = 50\pi - \frac{50\pi}{27} = \frac{1350\pi}{27} - \frac{50\pi}{27}$$

$$V_2 = \frac{1300\pi}{27}\ \text{cm}^3$$

3°) Parmi les quatre graphiques ci-dessous, l'un d'entre-eux représente le volume V(h) de la bouteille en fonction de la hauteur h de remplissage du bidon.
Quel est ce graphique? Pourquoi les autres ne sont-ils pas convenables?



Le bon graphique est le n°1, on peut vérifier que les valeurs V(h) pour h=0 cm, h=15 cm et h=21 cm sont correctes.

Par ailleurs, le graphique n°4 n'est pas convenable car si h=0, le volume ne peut pas être different de 0.

Le graphique n°2 n'est pas convenable car à partir de h=15 cm, V(h) diminue, ce qui n'est pas possible lorsqu'on remplit la bouteille.

Le graphique n°3 n'est également pas valable car à partir de h=15 cm, le volume augmente plus vite alors la partie conique de la bouteille contient moins d'eau que la partie cylindrique. On pourrait également additionner le volume du cylindre et le volume du cône et constater que le volume d'eau pour h=21 cm doit être environ de 1 328 cm^3 et non d'environ 2 500 cm^3.

Toute autre explication valable est prise en compte.

Exercice 6

Voici le classement des médailles d'or recues par les pays participant aux jeux olympiques pour le cyclisme masculine (source : wikipédia).

Bilan des médailles d'or de 1896 à 2008.

Nation	Or
France	40
Italie	32
Royaume-Uni	18
Pays-Bas	15
États-Unis	14
Australie	13
Allemagne	13
Union soviétique	11
Belgique	6
Danemark	6
Allemagne de l'Ouest	6
Espagne	5
Allemagne de l'Est	4

Nation	Or
Russie	4
Suisse	3
Suède	3
Tchécoslovaquie	2
Norvège	2
Canada	1
Afrique du Sud	1
Grèce	1
Nouvelle-Zélande	1
Autriche	1
Estonie	1
Lettonie	1
Argentine	1

1°) Voici un extrait du tableur :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Nombre de médailles d'or	1	2	3	4	5	6	11	13	14	15	18	32	40	
2	Effectif	8	2	2	2	1	3	1	2	1	1	1	1	1	26

Quelle formule a-t-on saisie dans la cellule O2 pour obtenir le nombre total de pays ayant eu une médaille d'or?

Pour obtenir le nombre total de pays ayant eu une médaille d'or, on saisie la formule : =SOMME(B2:N2).

On pouvait également écrire : =B2+C2+D2+E2+F2+G2+H2+I2+J2+K2+L2+M2+N2 .

2°) a) Calculer la moyenne de cette série (arrondir à l'unité).

On calcule la moyenne pondérée de cette série:

$$m=\frac{1\times8+2\times2+2\times3+2\times4+1\times5+3\times6+1\times11+2\times13+1\times14+1\times15+1\times1\times18+1\times32+1\times40}{26}=\frac{205}{26}\approx8$$

b) Déterminer la médiane de cette série.

L'effectif total est de 26 (pair), la médiane est donc la moyenne de la 13ème et de la 14ème valeur de la série, c'est-à-dire $med=\frac{4+4}{2}=4$. La médiane de la série est 4 médailles.

c) En observant les valeurs prises par la série, donner un argument qui explique pourquoi les valeurs de la moyenne et de la médiane sont différentes.

Les valeurs de la série sont très dispersées, l'étendue est de 39 et seuls deux pays dominent le classement avec 40 et 32 médailles alors que 8 pays ont une seule médaille.

3°) Pour le cyclisme masculine, 70 % des pays médaillés ont obtenu au moins une médaille d'or. Quel est le nombre de pays qui n'ont obtenu que des médailles d'argent ou de bronze (arrondir à l'unité) ?

Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de recherche. Elle sera prise en compte dans l'évaluation.

70% des pays médaillés ont reçu au moins un médaille d'or, c'est-à-dire que 26 représentent 70% du nombre total des pays médaillés.

Soit x le nombre de pays médaillés.

$$\frac{70}{100}\times x=26$$

$$x=\frac{26}{70}\times100\approx37$$

Il y a en tout 37 pays médaillés.

37-26 = 11 11 pays n'ont reçu que des médailles de bronze et d'argent.

Correction proposée par G. Micol, collège A. Blanqui à Puget-Théniers