Math93.com

DNB - Brevet des Collèges 2016 Amérique du Nord

9 juin 2016

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. Frai/Faux — 6 points

Affirmation 1 (Fausse)

La solution de l'équation $5x + 4 = 2x + 17$ est un nombre entier.

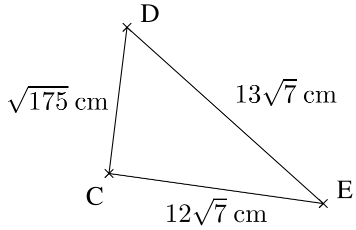
Preuve.

$$\begin{aligned} 5x + 4 = 2x + 17 &\iff 5x - 2x = 17 - 4 \\ &\iff 3x = 13 \iff x = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

Donc l'unique solution de l'équation est la rationnel $x = \dfrac{13}{3}$ qui n'est pas un nombre entier. L'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2 (Vraie)

Le triangle CDE est rectangle en C.



Preuve.

- **On calcule les carrés des longueurs** :

$$\begin{cases} DC^2 = \left(\sqrt{175}\right)^2 = 175 \\ CE^2 = \left(12\sqrt{7}\right)^2 = 12^2 \times 7 = 1\,008 \\ DE^2 = \left(13\sqrt{7}\right)^2 = 13^2 \times 7 = 1\,183 \end{cases}$$

- **Données**. Si le triangle CDE est rectangle, c'est en C car [DE] est le plus grand côté.

- **Le test** :

$$\begin{cases} DE^2 &= 1\,183 \\ DC^2 + CE^2 &= 175 + 1\,008 = 1\,183 \end{cases}$$

- **Conclusion**.
On a donc égalité, $DC^2 + CE^2 = DE^2$. De ce fait, d'après la *réciproque du théorème de Pythagore*, le triangle CDE est rectangle en C. L'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3 (Fausse)

Affirmation 3 : Manu affirme que, sur ces étiquettes, le pourcentage de réduction sur la montre est supérieur à celui pratiqué sur la paire de lunettes.

Lunettes	Montre
~~45 €~~	~~56 €~~
31,50 €	42 €

Preuve.

- **Sur ses lunettes**.
  La réduction est de : $45€ - 31,5€ = 13,5€$. Ce qui donne un pourcentage de réduction de :
  $$\frac{45-31,5}{45} = 0,3 = \underline{30\%}$$
- **Sur sa montre**.
  La réduction est de : $56€ - 42€ = 14€$. Ce qui donne un pourcentage de réduction de :
  $$\frac{56-42}{56} = 0,25 = \underline{25\%}$$
- **Conclusion**
  Le pourcentage de réduction sur la montre est inférieur à celui pratiqué sur la paire de lunettes. L'affirmation 3 est fausse.

Exercice 2. Probabilités 4 points

1. Guilhem, en week-end dans une station de ski, se trouve tout en haut de la station. Il a en face de lui, deux pistes noires, deux pistes rouges et une piste bleue qui arrivent toutes à un restaurant d'altitude. Bon skieur, il emprunte une piste au hasard.

1. a. Quelle est la probabilité que la piste empruntée soit une piste rouge ?

On suppose être en condition d'équiprobabilité. Guilhem a cinq choix de pistes : $\begin{cases} 2 \text{ noires} \\ 2 \text{ rouges} \\ 1 \text{ bleue} \end{cases}$, et il y a deux pistes rouges parmi les cinq pistes au choix. La probabilité de prendre une piste rouge est donc :

$$\boxed{p_1 = \frac{2}{5} = \underline{0,4}}$$

1. b. À partir du restaurant, sept autres pistes mènent au bas de la station : trois pistes noires, une piste rouge, une piste bleue et deux pistes vertes. Quelle est la probabilité qu'il emprunte alors une piste bleue ?

On suppose encore être en condition d'équiprobabilité. Guilhem a maintenant sept choix de pistes : $\begin{cases} 3 \text{ noires} \\ 1 \text{ rouge} \\ 1 \text{ bleue} \\ 2 \text{ vertes} \end{cases}$, et il y a une piste bleue parmi les sept pistes au choix. La probabilité de prendre une piste bleue est donc :

$$\boxed{p_2 = \frac{1}{7} \approx \underline{0,143}}$$

2. Guilhem effectue une nouvelle descente depuis le haut de la station jusqu'en bas dans les mêmes conditions que précédemment. Quelle est la probabilité qu'il enchaîne cette fois-ci deux pistes noires ?
La probabilité qu'il enchaîne cette fois-ci deux pistes noires est le produit de la probabilité de prendre une piste noire pour se rendre au restaurant d'altitude, par la probabilité de prendre une piste noire depuis se restaurant.

- On a vu lors de la question (**1.**) que $p_1 = \dfrac{2}{5} = 0,4$.
- À partir du restaurant, il y a 3 noires sur les sept pistes au choix. La probabilité de prendre une noire est donc de $p_3 = \dfrac{3}{7}$.

La probabilité qu'il enchaîne deux pistes noires est donc de :

$$p = p_1 \times p_3 = \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{35} \approx \underline{0,171}$$

Exercice 3. Tableur et Statistiques 5 points

Une station de ski a relevé le nombre de forfaits « journée » vendus lors de la saison écoulée (de décembre à avril). Les résultats sont donnés ci-dessous dans la feuille de calcul d'un tableur.

	A	B	C	D	E	F	G
1	mois	décembre	janvier	février	mars	avril	total
2	nombre de forfaits journées vendus	60 457	60 457	148 901	100 058	10 035	$\boxed{N = 379\,908}$
3							

1.

1. a. Quel est le mois durant lequel la station a vendu le plus de forfaits « journée » ? Le mois durant lequel la station a vendu le plus de forfaits « journée » est <u>le mois de février</u> avec 148 901 forfaits.

1. b. Ninon dit que la station vend plus du tiers des forfaits durant le mois de février. A-t-elle raison ? Justifier.

Le total de de forfaits « journée » vendus est :

$$N = 60\,457 + 60\,457 + 148\,901 + 100\,058 + 10\,035 = 379\,908$$

Or le tiers du nombre total de de forfaits « journée » vendus est :

$$\frac{379\,908}{3} = 126\,636 < 148\,901$$

<u>Ninon a raison</u>, la station vend plus du tiers des forfaits durant le mois de février.

Pour être plus précis, on peut calculer ce que représente les 148 901 forfaits vendus en février par rapport au total :

$$\frac{148\,901}{379\,908} \approx 0,392 \text{ soit environ } 39,2\%$$

2. Quelle formule doit-on saisir dans la cellule G2 pour obtenir le total des forfaits « journée » vendus durant la saison considérée ?
La formule à saisir dans la cellule G2 pour obtenir le total des forfaits « journée » vendus durant la saison considérée est :

$$\boxed{= SOMME(B2 : F2)} \text{ ou } \boxed{= B2 + C2 + D2 + E2 + F2}$$

3. Calculer le nombre moyen de forfaits « journée » vendus par la station en un mois. On arrondira le résultat à l'unité.
Le nombre moyen de forfaits « journée » vendus par la station en un mois est le quotient du nombre total par le nombre de mois de la saison, soit par 5. On obtient donc, arrondi à l'unité :

$$m = \frac{N}{5} = \frac{379\,908}{5} \approx \underline{75\,982}$$

Exercice 4. Problème, trigo — 4 points

Sur un télésiège de la station de ski, on peut lire les informations suivantes :

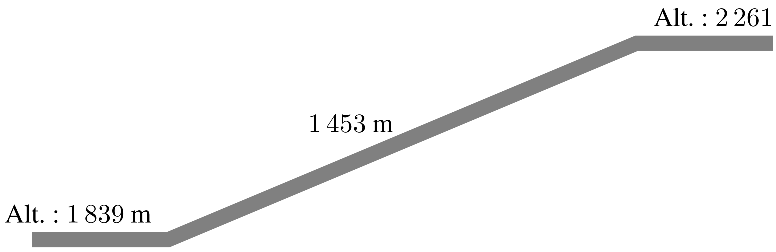
Télésiège 6 places

Vitesse : $5,5\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ — Puissance : 690 kW

Débit maxi : 3 000 skieurs par heure

Altitude du départ : 1 839 m — Altitude de l'arrivée : 2 261 m

Distance parcourue entre le départ et l'arrivée : 1 453 m



Ouverture du télésiège : 9h — Fermeture : 16h

1. Une journée de vacances d'hiver, ce télésiège fonctionne avec son débit maximum pendant toute sa durée d'ouverture. Combien de skieurs peuvent prendre ce télésiège ?

D'après les données, le télésiège fonctionne de 9h à 16h donc pendant 7h et son débit maximal est de 3 000 skieurs par heure. Il pourra donc prendre un maximum de :

$$7 \times 3\,000 = \underline{21\,000 \text{ skieurs}}$$

2. Calculer la durée du trajet d'un skieur qui prend ce télésiège. On arrondira le résultat à la seconde, puis on l'exprimera en minutes et secondes.

Un skieur qui prend ce télésiège va parcourir à la vitesse de $5,5\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, une distance de 1 453 m.

Distance (en m)	5,5 m	1 453 m
Temps (en s)	1 s	?

La durée du trajet, exprimée en seconde sera donc de :

$$t = \frac{1\,453 \times 1}{5,5} \approx \underline{264 \text{ s}}$$

Résultat qui peut se convertir en minutes et secondes par une simple division euclidienne par 60 :

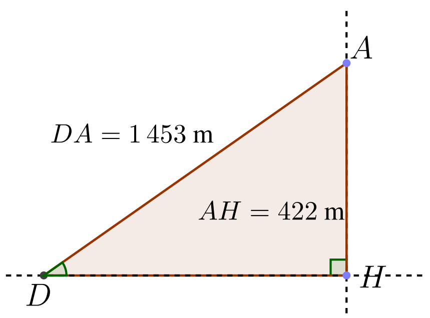
$$264 = 60 \times 4 + 24$$

La durée du trajet d'un skieur qui prend ce télésiège sera donc d'environ <u>264 secondes</u> soit <u>4 minutes 24 secondes</u>.

3. Calculer l'angle formé avec l'horizontale par le câble de ce télésiège. On arrondira le résultat au degré.

On peut schématiser le problème avec un triangle rectangle DHA, rectangle en H où D indique le départ du télésiège, A l'arrivée, et H l'intersection de la perpendiculaire au sol passant par A. La longueur AH se calcule simplement on faisant la différence de l'altitude de l'arrivée avec celle du départ soit :

$$AH = 2\,261 - 1\,939 = 422 \text{ m}$$



On a alors dans le triangle AHC rectangle en H :

$$\sin\widehat{HDA} = \frac{AH}{DA} = \frac{422}{1\,453}$$

La calculatrice donne alors

$$\boxed{\widehat{HDA} = \arcsin\frac{422}{1\,453} \approx 17^\circ}$$

Exercice 5. Fonctions affines et inéquations 5 points

Une station de ski propose deux tarifs de forfaits
Tarif 1 : le forfait « journée » à 40,50 €et Tarif 2 : Achat d'une carte club SKI sur Internet pour 31 € et donnant droit au forfait « journée » à 32 €.

1. Déterminer par le calcul :

1. a. Le tarif le plus intéressant pour Elliot qui compte skier deux journées.

- **Avec le tarif 1**.
  Le forfait 1 est le forfait « journée » à 40,50 €donc il va payer pour 2 journées :

$$p_1 = 2 \times 40,50 \text{ €} = \underline{81 \text{ €}}$$

- **Avec le tarif 2**.
  Avec le forfait 2, il va payer la carte club de 31 euro plus 32 euros par jour soit :

$$p_2 = 31 + 2 \times 32 \text{ €} = \underline{95 \text{ €}}$$

Le tarif le plus intéressant pour Elliot qui compte skier deux journées est donc le tarif 1.

1. b. Le nombre de journées de ski à partir duquel le tarif 2 est plus intéressant. On nomme x le nombre de journées skiées.

- **Avec le tarif 1**.
  Le forfait 1 est le forfait « journée » à 40,50 € donc pour x journées :

$$p_1(x) = x \times 40,50 \text{ €} = \underline{40,5\, x \text{ €}}$$

- **Avec le tarif 2**.
  Avec le forfait 2, il va payer la carte club de 31 euro plus 32 euros par jour soit :

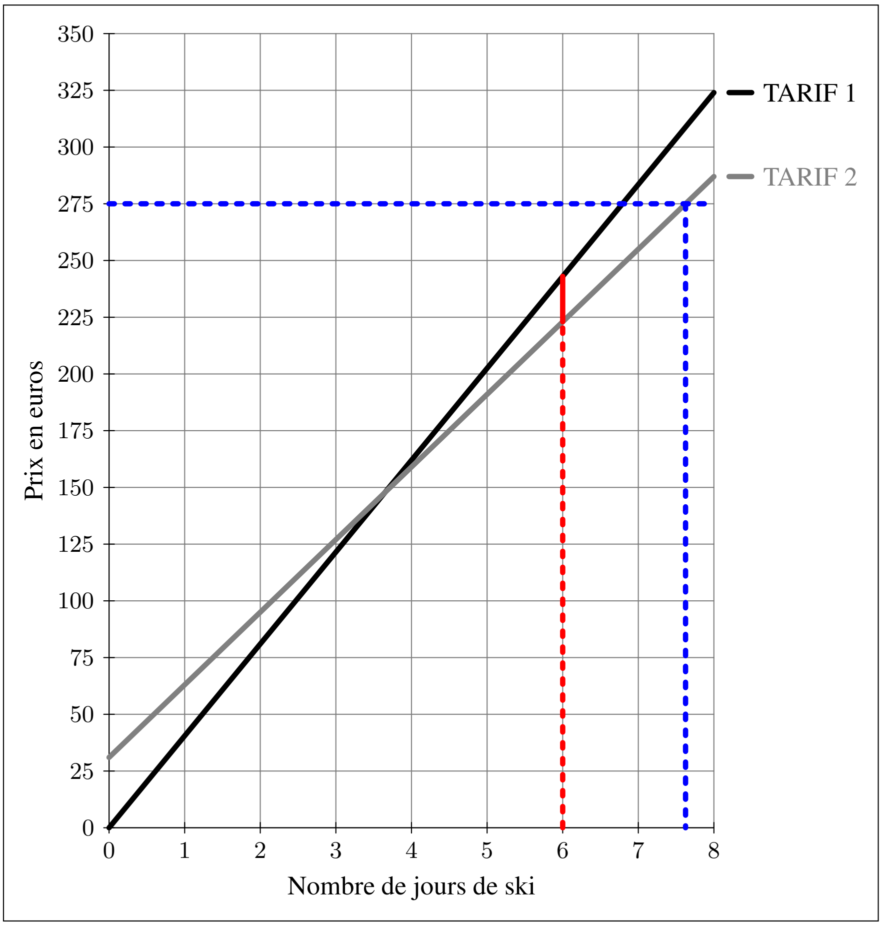
$$p_2(x) = 31 + x \times 32 \text{ €} = \underline{31 + 32\, x \text{ €}}$$

- On cherche le nombre de journées x de ski à partir duquel le tarif 2 est plus intéressant. Il nous faut donc résoudre l' inéquation en la variable x entière $p_2(x) < p_1(x)$:

$$\begin{aligned} p_2(x) < p_1(x) &\iff 31 + 32x < 40,5x \\ &\iff 31 < 40,5x - 32x \\ &\iff 31 < 8,5x \\ &\iff \frac{31}{8,5} < x \\ &\iff x > \frac{31}{8,5} \approx 3,65 \end{aligned}$$

Puisque x est un nombre entier, les solutions de l'inéquation sont les entiers supérieurs ou égaux à 4. Le nombre de journées de ski à partir duquel le tarif 2 est plus intéressant est donc de 4 jours.

2. Utiliser le graphique ci-dessous qui donne les prix en euros des forfaits en fonction du nombre de jours skiés pour les deux tarifs.



Déterminer par lecture graphique :

2. a. Le tarif pour lequel le prix payé est proportionnel au nombre de jours skiés. On justifiera la réponse.

- Le tarif 1 est représenté par une droite passant par l'origine du repère : le prix payé avec le tarif 1 est donc proportionnel au nombre de jours skiés.
  Le prix payé avec le tarif 1 pour six jours de ski est environ de 243 euros et avec le tarif 2 d'environ 223 euros. La différence de tarif est donc de 20 euros.
- Le tarif 2 est représenté par une droite ne passant pas par l'origine du repère : le prix payé avec le tarif 2 n'est donc pas proportionnel au nombre de jours skiés.

2. b. Une estimation de la différence de prix entre les deux tarifs pour 6 jours de ski.

Le prix payé avec le tarif 1 pour six jours de ski est environ de 243 euros et avec le tarif 2 d'environ 223 euros. La différence de tarif est donc de 20 euros. On visualise l'écart en rouge sur le graphique.

2. c. Le nombre maximum de jours de ski que peut faire Elliot avec un budget de 275 €.

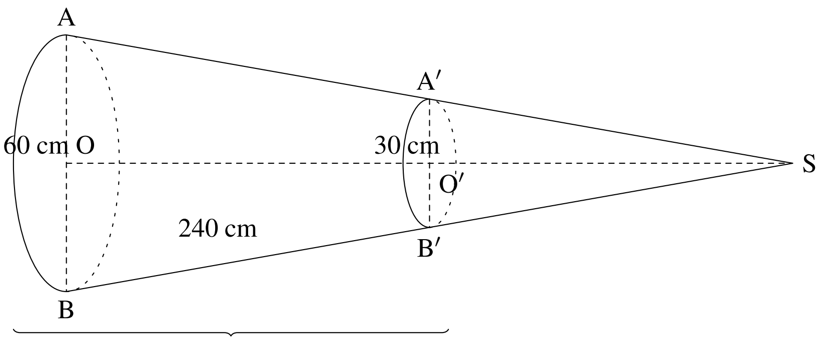
Avec 275 euros, Elliot peut skier sept jours en utilisant le tarif 2. On visualise la procédé de lecture d'antécédent en bleu sur le graphique.
Il lui reste de l'argent comme on peut aisément le calculer :

$$275 - (31 + 7 \times 32) = 20€$$

©ISSN 2272-5318

Exercice 6. Thalès, Pythagore et Volume — 7 points

Sur l'altiport (aérodrome d'altitude) de la station de ski se trouve une manche à air qui permet de vérifier la direction et la puissance du vent. Cette manche à air à la forme d'un tronc de cône de révolution obtenu à partir d'un cône auquel on enlève la partie supérieure, après section par un plan parallèle à la base.



On donne : AB = 60 cm, A′B′ = 30 cm, BB′ = 240 cm. O est le centre du disque de la base du grand cône de sommet S. O′ milieu de [OS], est le centre de la section de ce cône par un plan parallèle à la base. B′ appartient à la génératrice [SB] et A′ appartient à la génératrice [SA].

1. Démontrer que la longueur SB est égale à 480 cm.

On se place dans le triangle SOB. Les droites (OB) et (O'B') sont parallèles car elles sont toutes deux perpendiculaires à la droite (SO). En outre, le point O' est le milieu du segment [SO], donc d'après le théorème des milieux, le point B' est aussi le milieu du segment [SB].

$$\left\{\begin{array}{l}(OB)//(O'B')\\ O'=\text{mil}[SO]\end{array}\right. \Bigg| \underset{\text{Théorème des milieux}}{\Longrightarrow} B'\text{mil}[SB]$$

De de ce fait :

$$\boxed{SB = 2\times BB' = 2\times 240 = 480 \text{ cm}}$$

2. Calculer la longueur SO. On arrondira le résultat au centimètre.

On se place dans le triangle SOB. Le point O est le milieu du segment [AB] donc $OB = \frac{1}{2}AB = 30$ cm.

- **Données**.
  Le triangle SOB est rectangle en O. L'hypoténuse est donc le côté [SB].

- **Le théorème**.
  donc d'après le *théorème de Pythagore* :

$$SB^2 = SO^2 + OB^2$$
$$480^2 = SO^2 + 30^2$$

  On obtient donc

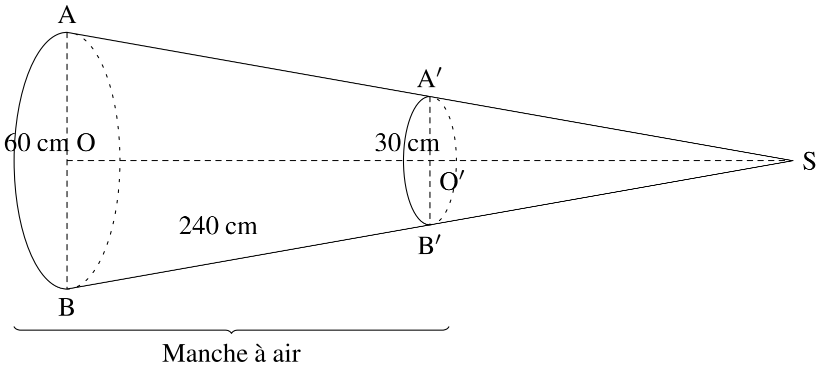
$$SO^2 = 480^2 - 30^2$$
$$SB^2 = 229\,500$$

- **Conclusion**.
  et puisque SO est une longueur, $SO > 0$ et on a une seule solution possible

$$\boxed{SO = \sqrt{229\,500} \approx 479 \text{ cm à 1 cm près.}}$$

©ISSN 2272-5318

3. Calculer le volume d'air qui se trouve dans la manche à air. On arrondira au centimètre cube.



Le volume de la manche à aire va s'obtenir en effectuant la différence du volume du grand cône et du petit cône. Pour chacun des cônes, on va calculer l'aire des disques de base de rayons respectifs [OB] et [O'B'] puis on appliquera la formule du volume :

$$V_{\text{cne}} = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur} \quad \text{et} \quad A_{\text{disque}} = \pi \times \mathrm{R}^2$$

Plus plus de rigueur, on va garder les valeurs exactes jusqu'au bout.

- **Volume du grand cône**.

$$A_{(\text{disque de rayon } OB)} = \pi \times OB^2 = 30^2\ \pi\ \ \text{cm}^2$$

$$V_{(\text{Grand Cône})} = \frac{1}{3} \times A_{(\text{disque de rayon } OB)} \times SO$$
$$\underline{V_{(\text{Grand Cône})}} = \frac{1}{3} \times \left(30^2\ \pi\right) \times \sqrt{229\,500} \approx 451\,504{,}90\ \ \text{cm}^3$$

- **Volume du petit cône**.
  On a ici O' milieu du segment [SO] et O' milieu du segment [A'B'] d'où :

$$O'B' = \frac{1}{2}A'B' = 15\ \ \text{cm} \quad \text{et} \quad SO' = \frac{1}{2}SO = \frac{1}{2}\sqrt{229\,500}$$

  Donc :

$$A_{(\text{disque de rayon } O'B')} = \pi \times O'B'^2 = 15^2\ \pi\ \ \text{cm}^2$$

$$V_{(\text{Petit Cône})} = \frac{1}{3} \times A_{(\text{disque de rayon } O'B')} \times SO'$$
$$\underline{V_{(\text{Petit Cône})}} = \frac{1}{3} \times \left(15^2\ \pi\right) \times \frac{1}{2}\sqrt{229\,500} \approx 56\,438{,}11\ \ \text{cm}^3$$

- **Volume de la manche à aire**.

$$V = V_{(\text{Grand Cône})} - V_{(\text{Petit Cône})}$$
$$V = \frac{1}{3} \times \left(30^2\ \pi\right) \times \sqrt{229\,500} - \frac{1}{3} \times \left(15^2\ \pi\right) \times \frac{1}{2}\sqrt{229\,500}$$

  Donc on obtient arrondi au centimètre cube :

$$\boxed{V \approx 395\,066\ \text{cm}^3}$$

Exercice 7. 5 points

*Un couple et leurs deux enfants Thomas et Anaïs préparent leur séjour au ski du 20 au 27 février. Il réservent un studio pour 4 personnes pour la semaine. Pendant 6 jours, Anaïs et ses parents font du ski et Thomas du snowboard. Ils doivent tous louer leur matériel. Ils prévoient **une dépense de 500 €** pour la nourriture et les sorties de la semaine.*

	06/02 - 13/02	**13/02 - 20/02**	**20/02 - 27/02**	**27/02 - 05/03**
Studio 4 personnes 29 m^2	870 €	1 020 €	1 020 €	1 020 €
T2 6 personnes 36 m^2	1 050 €	1 250 €	1 250 €	1 250 €
T3 8 personnes 58 m^2	1 300 €	1 550 €	1 550 €	1 550 €

Location de matériel de ski :	
Adulte : skis, casque, chaussures :	17 € par jour
Enfant : skis, casque, chaussures :	10 € par jour
Enfant : snowboard, casque, chaussures :	19 € par jour

Formule 1

1 adulte 187,50 € pour 6 jours
1 enfant 162,50 € pour 6 jours

Formule 2

Achat d'une Carte Famille	120 €
Puis :	
1 forfait adulte	25 € par jour
1 forfait enfant	20 € par jour

1. Déterminer pour cette famille, la formule la plus intéressante pour l'achat des forfaits pour six jours.

- **Formule 1**
  Cette formule propose 187,50 € par adulte pour 6 jours et 162,50 € par enfant pour 6 jours. Pour 2 adultes et 2 enfants cela représente donc :
  $$\boxed{p_1 = 2 \times 187,50 + 2 \times 162,50 = \underline{700\text{ €}}}$$
- **Formule 2**
  Cette formule propose l'achat d'une carte famille à 120 euros puis 25 € par adulte et par jour et 20 € par enfant et par jour. Pour 2 adultes et 2 enfants cela représente donc :
  $$\boxed{p_2 = 120 + 2 \times 25 \times 6 + 2 \times 20 \times 6 = \underline{660\text{ €}}}$$
- **Conclusion** : la formule 2 est donc plus intéressante pour l'achat des forfaits pour six jours.

2. Déterminer alors le budget total à prévoir pour leur séjour au ski.
Le budget total comprend la location du studio, du matériel de ski et l'achat du forfait (formule 2) soit :

- **Location du studio** : un studio 4 personnes du 20 au 27 février coûte 1 020 euros.
- **Location du matériel de ski**
  - Pour les deux adultes, 17 euros par jours soit : $2 \times 17 \times 6 = 204$ euros ;
  - Pour Thomas en snowboard, 19 euros par jours soit : $19 \times 6 = 114$ euros ;
  - Pour Anaïs en ski, 10 euros par jours soit : $10 \times 6 = 60$ euros ;
  - Soit au total :
  $$204 + 114 + 60 = \underline{378\text{ €}}$$

  Le budget total à prévoir pour leur séjour au ski est donc en ajoutant une dépense de 500 € pour la nourriture et les sorties de la semaine
  $$\boxed{660 + 1\,020 + 378 + 500 = 2\,558\text{ €}}$$

- Fin du devoir -

©ISSN 2272-5318